Zadania na 25.III

$char(k) \neq 2\,!$

1. Forma 2-liniowa spełnia warunek:

$$f(x,y)=0 \Rightarrow f(y,x)=0\,.$$

Wykazać, że f jest symetryczna albo antysymetryczna.

2. Niech ω będzie niezdegenerowaną 2-liniową formą antysymetryczną na przestrzeni V. Niech H będzie podprzestrzenią Lagrange'a (tzn. maksymalną podprzestrzenią taką, że $f(x,y)=0$ dla $x,y\in H$). Wykazać, że istnieje baza przestrzeni V:

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$$

taka, że wektory α_i rozpinają H, wektory β_i rozpinają inną podprzestrzeń Lagrange'a oraz $\omega(\alpha_i,\beta_j)=\delta^i_j$.

3. Dana jest A – macierz antysymetryczna o wyrazach całkowitych. Wykazać, że $det\,A$ jest kwadratem.

4. TT *Zadanie na przyszłość – jak już będą na wykładzie formy dodatnio określone.*
Ciało $k=\mathbb{R}$. Niech Γ będzie grafem o wierzchołkach $v\in I$. Definiujemy symetryczną formę dwuliniową na przestrzeni liniowej rozpiętej przez wierzchołki $V=lin_{v\in I}\{e_v\}$:

$$f(e_v,e_v)=2$$

$$f(e_v,e_w)=-1 \text{ gdy } \overline{vw} \text{ jest krawędzią}$$

$$f(e_v,e_w)=0 \text{ gdy } \overline{vw} \text{ nie jest krawędzią}$$

(zakładamy, że nie ma krawędzi $\overline{vv}$.)
Kiedy otrzymana forma jest dodatnio określona?
Które z tych form (dodatnio określonych) są jednocześnie niezdegenerowane nad każdym $\mathbb{F}_p$?

Wskazówka: