Ćwiczenia 22 i 25 luty

Na następnych zajęciach będziemy robić:

– Zadania 4 i 5 o funkcjach Schura

– Dokończenie zadania o liczbach Fibonacciego

– **Zadanie**: Niech $\mathcal{C}l(n)$ będzie zbiorem funkcji wielomianowych na przestrzeni macierzy kwadratowych $n \times n$, które przyjmują te same wartości na macierzach podobnych (tzw. funkcje klas). Oznaczmy przez $Sym(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zbiór wielomianów symetrycznych zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Niech $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oznacza macierz diagonalną o wyrazach $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wykazać, że przekształcenie

$$\mathcal{C}l(n) \to Sym(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$f \mapsto f(D(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

jest izomorfizmem.

– Zadania ze zbiorku Kostrikina: cz II, 3.2.2, 3.2.5, 3.2.7, 3.2.8, 3.2.10, 3.2.11 (w załączeniu poniżej)

- Ponadto zgodnie z zaleceniem Wykładowcy będziemy robić zadania:

21. Let V be a finite dimensional vector space over $\mathbf{Q}$ and let $A\colon V \to V$ be a $\mathbf{Q}$-linear map such that $A^5 = \mathrm{Id}$. Assume that if $v \in V$ is such that $Av = v$, then $v = 0$. Prove that $\dim V$ is divisible by 4.

22. Let V be a finite dimensional vector space over $\mathbf{R}$, and let $A\colon V \to V$ be an $\mathbf{R}$-linear map such that $A^2 = -\mathrm{Id}$. Show that $\dim V$ is even, and that V is a direct sum of 2-dimensional A-invariant subspaces.

3.1.21. Niech operator liniowy w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ będzie reprezentowany maci

$$\begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$$

w bazie $\big((8,-6,7),\ (-16,7,-13),\ (9,-3,7)\big)$. Wyznaczyć jego mac
w bazie $\big((1,-2,1),\ (3,-1,2),\ (2,1,2)\big)$.

3.1.22. Niech operator liniowy $\mathcal{A}_0$ w n-wymiarowej przestrzeni liniowej V p
prowadza liniowo niezależne wektory $a_1, \ldots, a_n$ odpowiednio na wekt
$b_1, \ldots, b_n$. Wykazać istnienie takiej bazy $e = (e_1, \ldots, e_n)$, w której mac
tego operatora jest równa BA^{-1}, gdzie kolumny macierzy A i B składają
odpowiednio, ze współrzędnych danych wektorów względem bazy e.

3.1.23. Znaleźć ogólną postać macierzy operatora liniowego $\mathcal{A}$ względem ba
której pierwszych k wektorów stanowią:

a) wektory bazy jądra operatora $\mathcal{A}$;

b) wektory bazy obrazu operatora $\mathcal{A}$.

3.1.24. Wykazać, że jeśli $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ jest rozkładem wielomianu f
na czynniki względnie pierwsze i operator liniowy $\mathcal{A}$ spełnia $f(\mathcal{A}) = 0$
macierz operatora $\mathcal{A}$ w pewnej bazie ma postać $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, gdzie $f_1(A_1) =$
$f_2(A_2) = 0$.

3.2. Wektory własne, podprzestrzenie niezmiennicze, podprzestrzenie pierwiastkowe

3.2.1. Wyznaczyć wektory własne i wartości własne:

a) operatora różniczkowania w przestrzeni $\mathbf{R}[x]_n$;

b) operatora $X \mapsto X^t$ w przestrzeni $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$.

3.2.2. Wykazać, że w przestrzeni $\mathbf{R}[x]_n$ zbiorem wartości własnych operat
liniowego $f \mapsto f(ax+b)$, $a \neq 0, \pm 1$, jest $\{1, a\ \ldots, a^n\}$.

3.2.3. Udowodnić, że wektor własny operatora liniowego $\mathcal{A}$ odpowiadający w
tości własnej λ jest wektorem własnym operatora liniowego $f(\mathcal{A})$, gdzie
jest wielomianem, odpowiadającym wartości własnej $f(\lambda)$.

3.2.4. Wykazać, że jeśli operator liniowy $\mathcal{A}$ jest nieosobliwy, to operator
i $\mathcal{A}^{-1}$ mają te same wektory własne.

3.2.5. Wykazać, że wszystkie niezerowe wektory przestrzeni są wektorami w
snymi operatora $\mathcal{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{A}$ jest operatorem homot
$x \mapsto \alpha x$, gdzie α jest ustalonym skalarem.

3.2.6. Udowodnić, że jeśli operator liniowy $\mathcal{A}$ w n-wymiarowej przestrzeni m
różnych wartości własnych, to dla każdego operatora liniowego przemienn
z $\mathcal{A}$ istnieje baza złożona z jego wektorów własnych.

3.2.7. Wykazać, że podprzestrzeń $V_\lambda(\mathcal{A})$, złożona ze wszystkich wektorów własnych operatora $\mathcal{A}$ odpowiadających wartości własnej λ i wektora zerowego, jest niezmiennicza względem dowolnego operatora $\mathcal{B}$ przemiennego z $\mathcal{A}$.

3.2.8. Wykazać, że dla dowolnego (nawet nieskończonego) zbioru parami przemiennych operatorów liniowych w zespolonej, skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej:

a) istnieje wspólny wektor własny;

b) istnieje baza, w której macierze tych wszystkich operatorów są górnotrójkątne.

3.2.9. Wykazać, że jeśli operator $\mathcal{A}^2$ ma wartość własną λ^2, to jeden z elementów λ i $-\lambda$ jest wartością własną operatora $\mathcal{A}$.

3.2.10. Udowodnić podane stwierdzenia:

a) współczynniki $c_1, \ldots, c_n$ wielomianu

$$|A - \lambda E| = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + c_n$$

są sumami minorów głównych odpowiedniego stopnia macierzy A;

b) suma i iloczyn wartości własnych macierzy A są równe odpowiednio jej śladowi i wyznacznikowi.

3.2.11. Wykazać, że każdy wielomian stopnia n o najwyższym współczynniku $(-1)^n$ jest wielomianem charakterystycznym pewnej macierzy stopnia n.

3.2.12. Wykazać, że jeśli A i B są macierzami kwadratowymi jednakowego stopnia, to macierze AB i BA mają jednakowe wielomiany charakterystyczne.

3.2.13. Wyznaczyć wartości własne macierzy $A^t \cdot A$, gdzie A jest jednowierszową macierzą $(a_1, \ldots, a_n)$.

3.2.14. Wykazać, że wszystkie wartości własne macierzy są różne od zera wtedy i tylko wtedy, gdy macierz jest nieosobliwa.

3.2.15. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne operatorów liniowych danych w pewnej bazie przez macierze:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$; **e)** $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

3.2.16. Zbadać, które z podanych macierzy można sprowadzić do postaci diagonalnej przez przejście do innej bazy nad ciałem $\mathbf{R}$ lub nad ciałem $\mathbf{C}$: