6/1/2003 00^{21}

TOPOLOGIA ROZMAITOŚCI

Rozmaitości

Rozmaitością topologiczną nazywa się przestrzeń Hausdorffa, posiadającą bazę przeliczalną i lokalnie homeomorficzną z przestrzenią kartezjańską. Mapą na rozmaitości nazywamy podzbiór otwarty $U \subset M$ wraz z homeomorfizmem $h : U \to \mathbb{R}^n$. Zbiór map $\{(U_i, h_i)\}_{i \in I}$ nazywamy atlasem jeśli $\{U_i\}_{i \in I}$ jest pokryciem M.

Rozmaitością topologiczną z brzegiem nazywa się przestrzeń Hausdorffa, posiadającą bazę przeliczalną i lokalnie homeomorficzną z pół-przestrzenią kartezjańską tzn. $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, ..., x_n) | x_1 \geq 0\}$. Zbiór punktów w M przechodzących przy pewnej mapie na punkty w $\mathbb{R}^{n-1}$ nazywamy brzegiem rozmaitości M i oznaczamy ∂M.

Jeśli każdy punkt rozmaitości topologicznej M posiada otoczenie homeomorficzne z podzbiorem ustalonej przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to mówimy że M jest n-wymiarowa. Składowe spójne dowolnej rozmaitości są rozmaitościami określonego wymiaru, Rozmaitością zamkniętą nazywamy zwartą i spójną rozmaitość (bez brzegu).

Strukturą gładką na M nazywamy maksymalny atlas $\{U_i, h_i\}_{i \in I}$ taki, że wszystkie odwzorowania przejścia $h_j h_i^{-1}$ są gładkie. Rozmaitość topologiczną z wyróżnioną strukturą gładką nazywamy rozmaitością gładką, lub w skrócie rozmaitością. Odwzorowanie $f : M \to N$ nazywa się gładkie, jeśli jego złożenia z dowolnymi mapami są gładkie, Analogicznie definiuje gładką rozmaitość z brzegiem. Brzeg rozmaitości gładkiej jest rozmaitością gładką. W kategorii rozmaitości gładkich istnienie suma prosta (rozłączna), i iloczyn kartezjański.

Mówimy, że rozmaitość zwarta M ogranicza jeśli istnieje rozmaitość z brzegiem W taka, że brzeg ∂W jest dyfeomorficzny z M. Dwie rozmaitości zwarte M , N nazywamy bordycznymi jeśli istnieje rozmaitość z brzegiem W, której brzeg ∂W jest dyfeomorficzny z suma rozłączną $M \coprod N$. Bordyzm jest relacją równoważności.

Pierścień bordyzmu rozmaitości

Rozpatrzmy zbiór klas dyfeomorfizmu rozmaitości zwartych - jest to w istocie zbiór, gdyż każda zwarta rozmaitość jest dyfeomorficzna z podzbiorem przestrzenie $\mathbb{R}^\infty$. W tym zbiorze wprowadzamy relację bordyzmu; zbiór klas równoważności tej relacji będziemy oznaczać N_* W zbiorze N_* można wprowadzić szereg dodatkowych struktur. Dla dowolnych klas bordyzmu rozmaitości $[M]$, $[N]$ definiujemy:

Dodawanie $[M] + [N] := [M \coprod N]$

Mnożenie $[M]\dot{[}N] := [M \times N]$

Gradacja Dla każdego $k \geq 0$ jest wyróżniona podgrupa $N_k \subset N_*$ składająca się z klas bordyzmu rozmaitości wymiaru k . Dla $k < 0$ przyjmujemy $N_k = 0$.

Stwierdzenie. *Zbiór N_* z wymienionymi strukturami jest pierścieniem z gradacją (a nawet algebrą nad ciałem $\mathbb{F}_2$).*

Zadanie. *Na podstawie twierdzeń o klasyfikacji rozmaitości wykazać, że $N_0 \simeq \mathbb{Z}_2$, $N_1 \simeq 0$, $N_2 \simeq \mathbb{Z}_2$. Znacznie trudniej jest wykazać, że $N_3 = 0$.*

Pierścień N_* rozszerza się do funktora $N_* : top \to Ab^*$ z kategorii przestrzeni topologicznych do kategorii grup z gradacją, mającego pewne własności, pożyteczne do obliczenia N_*

Dla dowolnej przestrzeni X zdefiniujemy grupę abelową $N_*(X)$ W tym celu wprowadzimy pewne definicje: rozmaitością singularną w X nazwiemy odwzorowanie ciągłe $f : M \to X$, gdzie M jest rozmaitością zwartą (bez brzegu). Rozmaitość singularna $\phi : M \to X$ ogranicza, jeśli istnieje rozmaitość z brzegiem WDwie oraz odwzorowanie ciągłe $F : W \to X$ takie, że istnieje dyfeomorfizm $h : M \simeq\simeq \partial W$ oraz $F \circ h = \phi$. Dwie rozmaitości singularne $f_i : M_i \to X$ nazwiemy brodycznymi, jeśli suma $f_1 \coprod f_2 : M_1 \coprod M_2 \to X$ ogranicza.

Zbiór klas bordyzmu rozmaitości singularnych w X oznaczamy $N_*(X)$; oczywiście $N_*(pt) = N_*$. W zbiorze $N_*(X)$, podobnie jak w N_* istnieje określona analogicznie struktura grupy abelowej (a nawet przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{F}_2$ z gradacją.) Mnożenie nie jest na ogół określone "wewnątrz" grupy $N_*(X)$. Dla dwóch przestrzeni X, Y mamy natomiast mnożenie $N_*(X) \times N_*(Y) \to N_*(X \times Y)$. Dla rozmaitości singularnych $\phi : M \to X$ oraz $\psi : N \to Y$ definiujemy $[\phi]\dot{[}\psi] = [\phi \times \psi : M \times N \to X \times Y]$. Mnożenie to jest dwuliniowe, Dla dowolnej przestrzeni X mnożenie $N_*(pt) \times N_*(X) \to N_*(pt \times X) = N_*(X)$ wyznacza na $N_*(X)$ strukturę N_*-modułu z gradacją.

Dla dowolnego odwzorowania ciągłego $f : X \to Y$ definiujemy homomorfizm indukowany $f_* : N_*(X) \to N_*(Y)$ wzorem $f_*([\phi]) := [f \circ \phi]$.

Stwierdzenie. *Istnieje funktor $N_*(-) : Spaces \to N_*{-}mod$ spełniający następujące* *warunki:*

(H))Homotopia *Jeśli przekształcenia* $f_0 \sim f_1$ *są homotopijne, to* $f_{0*} = f_{1*}$.

(MV))Ciąg Meyera-Vietorisa *Dla dowolnych podzbiorów otwartych takich, że* $U_1 \cup U_2 = X$ *istnieje długi ciąg dokładny funktorów:*

$$... \to N_k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{i_{1*} \oplus i_{2*}} N_k(U_1) \oplus N_k(U_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} N_k(X) \xrightarrow{\partial} N_{k-1}(U_1 \cap U_2) \to ...$$

przy czym homomorfizm ∂ *jest homomorfizmem* N_**-modułów z gradacją (stopnia -1)*

Dowód. Własność homotopii wynika wprost z definicji. Niech $F : X \times I \to Y$ będzie homotopią. Wtedy dla dowolnej rozmaitości singularnej $\phi : M \to X$ odwzorowanie $F \circ (\phi \times id) : M \times I \to Y$ jest bordyzmem między $f_0 \circ \phi$ a $f_1 \circ \phi$.

Zdefiniujemy homomorfizm brzegu ∂ w ciągu Mayera-Vietorisa; pozostałe są indukowane przez odpowiednie inkluzje. Niech $\phi : M \to X$ będzie rozmaitością singularną. Rozważmy pokrycie M zbiorami $V_i := \phi^{-1}(U_i)$. Istnieją podrozmaitości z brzegiem $M_i \subset M$ pokrywające M takie, że $M_i \subset V_i$ oraz $M_1 \cap M_2 = \partial M_1 = \partial M_2$. Definiujemy $\partial[\phi] := [\phi | \partial M_1]$. Pozostaje udowodnić istnienie podrozmaitości M_i oraz niezależność definicji ∂ od ich wyboru. □

Rozważa się też zredukowane tzw. grupy zredukowane

$$\tilde{N}_*(X) := \ker\{N_*(X) \xrightarrow{c_*} N_*(pt)\}$$

spełniające nieco zmodyfikowane (uwaga na zbiór pusty!) warunki (H) i (CV).

Zadanie. *Wykazać, że* $N_*(S^n)$ *jest wolnym modułem nad* N_* *z dwoma generatorami: w wymiarze* 0 *(reprezentowanym przez włożenie punktu) i w wymiarze* n *(reprezentowanym przez identyczność* $[S^n \xrightarrow{=} S^n]$*).* $\tilde{N}_*(S^n)$ *jest modułem z jednym generatorem w wymiarze* n *(reprezentowanym przez identyczność* $[S^n \xrightarrow{=} S^n]$*).*

Stwierdzenie. *Dla dowolnej przestrzeni* X *oraz* $n \geq 0$ *homomorfizm mnożenia* $N_*(X) \otimes_{N_*} N_*(S^n) \to N_*(X \times S^n)$ *jest izomorfizmem i indukuje izomorfizm* $N_*(X) \to \tilde{N}_*(X_+ \wedge S^n)$.

Zadanie. *Obliczyć algebrę bordyzmu produktu sfer* $N_*(S^{n_1} \times ... \times S^{n_k})$.

Wiązki wektorowe - krótki kurs

Niech F będzie ciałem $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$ a V (skończenie wymiarową) przestrzenią wektorową nad F.

Produktową wiązka wektorową z włóknem V nad przestrzenią X nazywamy rzutowanie $pr_X : X \times V \to X$.

Trywialną wiązką wektorowa z włóknem V nazywamy przekształcenie ciągłe $p : E \to X$ takie, że dla dowolnego $x \in X$ w przeciwobrazie (włóknie) $E_x := p^{-1}(x)$ zadana jest struktura przestrzeni wektorowej nad F, oraz istnieje homeomorfizm $h : E \to X \times V$ taki, że $pr_1 \circ h = p$ oraz dla każdego $x \in X$, $h : p^{-1}(x) \to V$ jest izomorfizmem liniowym.

Wiązka wektorową (lokalnie trywialną))nad X nazywamy przekształcenie ciągłe $p : E \to X$ takie, że dla dowolnego $x \in X$ w przeciwobrazie (włóknie) $p^{-1}(x)$ zadana jest struktura przestrzeni wektorowej nad F oraz istnieje pokrycie otwarte $\{U_i\}_{i \in I}$ takie, że wiązki $p : p^{-1}(U) \to U$ są trywialne.

Najważniejszym przykładem wiązki wektorowej jest wiązka styczna do rozmaitości różniczkowej.

Morfizmem wiązek wektorowych $p_i : E_i \to X$nad przestrzenią X nazywamy przekształcenie ciągłe $\phi : E_1 \to E_2$ takie, że dla każdego $x \in X$ obcięcie $\phi_x : E_{1x} \to E_{2x}$ jest przekształceniem liniowym. Kategoria wiązek wektorowych nad punktem to po prostu kategoria przestrzeni wektorowych. W kategorii wiązek wektorowych nad X istnieje suma prosta i iloczyn kartezjański dwóch wiązek (są one izomorficzne). Podobnie jak w kategorii przestrzeni wektorowych na wiązkach wektorowych można wykonywać również inne operacje takie jak: iloczyn tensorowy, wiązka homomorfizmów, wiązka sprzężona.

Zadanie. *Sklejanie wiązek. Niech $X = X_1 \cup X_2$ oraz $A = X_1 \cap X_2$. Trójkę (E_1, ϕ, E_2) nazywamy danymi sklejenia jeśli $E_i \to B$ są wiązkami wektorowymi a $\phi : E_1|A \to E_2|A$ izomorfizmem wiązek (funkcją sklejającą). (Jeśli $E_i|A$ są trywialne, to ϕ można utożsamiać z odowzorowaniem ciągłym $f : A \to GL(n, \mathbb{C})$.) Przez $E(\phi) \to X$ oznaczamy wiązkę taką, że $E(\phi) := E_1 \sqcup E_2/(e \sim \phi(e))$. Wykazać, że $E(\phi) \to X$ jest wiązka wektorową oraz jeśli $\bar{\psi}_i : E_i \to E_i$ jest automorfizmem, to $E(\phi) \simeq E(\phi\bar{\psi}_1) \simeq E(\bar{\psi}_2\phi)$,*

Zadanie. *Jądro i kojądro morfizmu wiązek $\phi : E \to E'$ nad ustaloną przestrzenią X takiego, że rząd$(f_x) = const$ jest wiązką wektorową.* **Uwaga:** *Wynika stąd, że* *każda podwiązka posiada podwiązkę dopełniającą. Dopełnienie podwiązki trywialnej w wiązce trywialnej nie musi być wiązką trywialną. - por. Zad. 9.*

Zadanie. *Jeśli wiązka wektorowa nad przestrzenią parazwartą posiada skończone pokrycie trywializujące to zanurza się w skończenie wymiarową wiązkę trywialną.*

Zadanie. *Zauważyć izomorfizm wiązek rzeczywistych:* $TS^n \oplus \theta^1 \simeq \theta^{n+1}$. *(* θ^n *oznacza wiązke trywialną wymiaru* n*.) Czy zachodzi on także dla* $n = 2$*, gdy rozpatrujemy wiązki zespolone?*

Jeśli $f : Y \to X$ jest przekształceniem ciągłym, to można "przeciągać" przy jego pomocy wiązki znad X nad Y. Dokładniej, dla wiązki $p : E \to X$ definiujemy wiązkę $f^!E := \{(y, e) \in Y \times E \mid p(e) = f(y)\} \xrightarrow{p' := pr} Y$. Łatwo sprawdzić, że p' jest wiązką wektorową. Ta konstrukcja wyznacza funktor $f^! : \mathbb{V}\mathrm{ect}(X) \to \mathbb{V}\mathrm{ect}(Y)$, zachowujący sumę prostą, iloczyn tensorowy i inne konstrukcje na wiązkach.

Przekrojem wiązki wektorowej $p : E \to X$ nazywamy dowolne odwzorowanie $s : X \to E$ takie, że $p \circ s = id_X$. Dowolna wiązka ma **przekrój zerowy** $s(x) := 0_x$.

Zadanie. *Wykazać, że zbiór przekrojów* $\Gamma(E)$ *wiązki wektorowej* $p : E \to X$ *jest modułem (projektywnym) nad pierścieniem funkcji ciągłych* $C^(X)$ *na przestrzeni* X.

Rozmaitości Grassmanna i wiązki uniwersalne

Niech V będzie przestrzenią wektorową (nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) a k nieujemną liczbą całkowitą. Będziemy rozpatrywać zbiór k-wymiarowych podprzestrzeni w V, oznaczając go $G_k(V)$. W tym zbiorze można w sposób naturalny wprowadzić topologię ilorazową pochodzącą z przestrzeni, której elementami są układy k wektorów liniowo niezależnych, posiadającej topologie podprzestrzeni produktu $V \times ... \times V$. Przekształcenie przypisujące dowolnemu układowi k wektorów l.n. $(v_1, .., v_k)$ podprzestrzeń generowaną przez ten układ jest oczywiście surjekcja na $G_k(V)$.

Przestrzenie Thoma

1. Niech $E \to X$ będzie n-wymiarową rzeczywista wiązką wektorową. Wykazać, że następujące konstrukcje przestrzeni Thoma, oznaczanej $\mathrm{Th}(E)$, są naturalnie homeomorficzne:

   a) $\mathbb{P}(E \oplus 1)/\mathbb{P}(E)$, gdzie $\mathbb{P}(-)$ oznacza funktor projektywizacji;

b) $D(E)/S(E)$, gdzie $S(E) \subset D(E) \subset E$ oznacza odpowiednio wiązkę sfer i wiązkę dysków w pewnej metryce na E;

d) Jeśli X jest przestrzenią zwartą, $E^+ := E \cup \{\infty\}$, jednopunktowe uzwarcenie przestrzeni E.

Uwaga Dla wiązki zerowymiarowej nad X definiujemy przestrzeń Thoma jako $X \coprod \{\infty\}$, która także będziemy oznaczać X^+.

2. Przekształcenie ciągłe $f : Y \to X$ indukuje przekształcenie przestrzeni Thoma $\mathrm{Th}(f^*E) \to \mathrm{Th}(E)$. Zbadać zachowanie się funktora Th ze względu na sklejanie i ściskanie wiązek.

3. Dla pary wiązek wektorowych $E_i \to X_i$ istnieje naturalny homeomorfizm $\mathrm{Th}(E_1 \times E_2) \simeq \mathrm{Th}(E_1) \wedge \mathrm{Th}(E_2)$. W szczególności $\mathrm{Th}(E \oplus n) \simeq \Sigma^n \mathrm{Th}(E)$.

4. Wykazać, że przekształcenie przekątnej $\Delta : \mathrm{Th}(E) \to X^+ \wedge \mathrm{Th}(E)$ zadane wzorem $\Delta(e) = [p(e), e]$ oraz $p(\infty) := [\infty, \infty]$ jest ciągłe.

5. Niech $H_V \to \mathbb{P}(V)$ będzie wiązką kanoniczną nad przestrzenią rzutową. Istnieje homeomorfizm $\mathrm{Th}(H_V) \simeq \mathbb{P}(V \oplus 1)$ przeprowadzający przekrój zerowy $\mathbb{P}(V) \subset H_V \subset \mathrm{Th}(H_V)$ na podprzestrzeń $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(V \oplus 1)$. a uzwarcenia włókien na liniowo zanurzone podprzestrzenie $\mathbb{P}(L \oplus 1) \subset \mathbb{P}(V \oplus 1)$, gdzie $L \subset V$ jest podprzestrzenią jednowymiarową.

Pierścień kobordyzmu

Wprowadzimy teorię kohomologii, zwaną teorią kobordyzmu. W odróżnieniu od teorii bordyzmu, dla dowolnej rozmaitości, niekoniecznie zwartej, zdefiniujemy pierścień $N^*(X)$ (a nie tylko grupę!) w sposób funktorialny kontrawariantnie zależący od X.

$$N^q(X) := \{\phi : Z \to X \ : \ dimX - dimZ = q \ , f \text{ gładkie, właściwe}\}/\text{kobordyzm}$$

Struktura grupy, podobnie jak w definicji bordyzmu, jest dana przez sumę rozłączna rozmaitości. Zauważmy, że $N^q(pt) = N_{-q}(pt)$, a nawet ogólniej:

Dwoistość Poincaré. *Jeśli X jest zwartą n-wymiarową rozmaitością, to zachodzi izomorfizm: $N^q(X) \simeq N_{n-q}(X)$.*

Zadanie. *Napisać ciąg dokładny Mayera-Vietorisa dla $N^*(-)$ i sprawdzić jego dokładność.*

Dla odwzorowania gładkiego $f : X \to Y$ definiujemy homomorfizm $f^* : N^q(Y) \to N^q(X)$ w sposób następujący: dla dowolnego $[\phi] \in N^q(Y)$ znajdujemy reprezentanta $[\phi']$ takiego, że ϕ' jest transwersalne do f i definiujemy $f^*([\phi]) := [Z \times_Y X \to X]$. Można sprawdzić, że ta definicja nie zależy od dokonanego wyboru. W ten sposób N^* zostało zdefiniowane jako funktor do kategorii grup z gradacją.

Struktura multyplikatywna. Dla dowolnych rozmaitości X, Y iloczyn kartezjański odwzorowań definiuje dwuliniowe odwzorowanie:

$$N^p(X) \times N^q(Y) \xrightarrow{\times} N^{p+q}(X \times Y).$$

Łatwo jest sformułować i sprawdzić własności łączności i przemienności tego mnożenia (podobnie jak w przypadku bordyzmu). Kładąc $X = pt$ otrzymujemy (znów podobnie jak w przypadku bordyzmu) strukturę $N^* := N^*(pt)$-modułu na $N^*(Y)$.

W odróżnieniu od bordyzmu, $\times$ definiuje wewnętrzne mnożenie (oznaczane $\cup$) w grupach $N^*(X)$ w następujący sposób: Niech $\Delta : X \to X \times X$ będzie przekątną tzn. $\Delta(x) := (x, x)$. Mnożenie $\cup$ określamy jako złożenie:

$$N^p(X) \times N^q(X) \xrightarrow{\times} N^{p+q}(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} N^{p+q}(X).$$

Łatwo sprawdzić, że $\cup$ zadaje w $N^*(X)$ strukturę pierścienia a f^* jest homomorfzimem pierścieni oraz homomorfzimem N^*-modułów.

Zadanie. *Wykazać, że* $\forall\, q \geq 0$ *istnieje izomorfizm pierścieni* $N^*(S^q) \simeq N^*[x]/(x^2)$, *przy którym* x *przechodzi na klasę* $[pt \to S^q] \in N^q(S^q)$.

Kobordyzm przestrzeni z wyróżnionym punktem. Niech w rozmaitości X będzie wyróżniony punkt x_0 a $c_{x_0} : pt \to X$ będzie włożeniem $c_{x_0}(pt) := x_0$. Zdefiniujemy grupę (a nawet ideał):

$$N^*(X, x_0) := ker\{N^*(X) \xrightarrow{c^*_{x_0}} N^*(pt)\}.$$

Odwzorowanie gładkie $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ definiuje oczywiście homomorfizm $f^* : N^*(Y, y_0) \to N^*(X, x_0)$.

Grupa $N^*(X, x_0)$ jest izomorficzna z $\tilde{N}^*(X) := \mathrm{coker}\{c^* : N^*(pt) \to N^*(X)\}$, gdzie $c : X \to pt$ jest odwzorowaniem stałym (lewą odwrotnością c_{x_0}). Jeśli wybór punktu wyróżnionego jest oczywisty będziemy stosować krótsze oznaczenie $\tilde{N} * (X) = N^*(X, x_0)$.

Pierścień (bez jedności) $N^*(X, x_0)$ można zdefiniować także wtedy, gdy X jest rozmaitością poza punktem x_0, tzn. $X \setminus x_0$ jest rozmaitością:

$N^q(X) := \{\phi : Z \to X \backslash x_0 \,:\, dimX - dimZ = q\ , f$ gładkie, właściwe w $X\}$/kobordyzm

Zadanie. *Sprawdzić, że jeśli* X *jest rozmaitością, to* $N^*(X \sqcup pt, pt) \simeq N^*(X)$ *oraz jeśli* $x_0 \in X$, *to powyższe dwie definicje* $N^*(X, x_0)$ *są zgodne.*

Zadanie. *Sprawdzić, że* $\times$ *definiuje odwzorowanie dwuliniowe:*

$$N^p(X, x_0) \times N^q(Y, y_0) \xrightarrow{\wedge} N^{p+q}(X \wedge Y, [x_0, y_0]),$$

które dla $Y = S^q$ *zadaje izomorfzim*

$$N^*(X, x_0) \otimes_{N^*} N^*(S^q, y_0) \simeq N^*(X \wedge S^q, [x_0, y_0]).$$

Izomorfizm Thoma i klasa Eulera

Niech $E \to X$ będzie q-wymiarową rzeczywistą wiązką wektorową nad rozmaitością X, a $s_0 : X \to E$ jej przekrojem zerowym. Określimy element, zwany klasą Thoma tej wiązki $U_E := [s_0 : X \to \mathrm{Th}(E)] \in \tilde{N}^q(\mathrm{Th}(E))$ jako klasę kobordyzmu przekroju zerowego. Dla każdego punktu $x \in X$ obcięcie klasy Thoma $U_E|x \in \tilde{N}^q(\mathrm{Th}(E_x)) \simeq \tilde{N}^q(S^q)$ jest generatorem $\tilde{N}^*(S^q)$ jako N^*-modułu.

Przy pomocy klasy Thoma i struktury multyplikatynej możemy określić homomorfzim N^*-modułów $s_\natural : N^*(X) \to \tilde{N}^{*+q}(\mathrm{Th}(E))$ Rozważmy w tym celu superpozycję:

$$\tilde{N}^*(X^+) \times \tilde{N}^q(\mathrm{Th}(E)) \xrightarrow{\wedge} \tilde{N}^{*+q}(X^+ \wedge \mathrm{Th}(E)) \xrightarrow{\Delta^*} \tilde{N}^{*+q}(\mathrm{Th}(E))$$

gdzie przekształcenie przekątnej $\Delta : \mathrm{Th}(E) \to X^+ \wedge \mathrm{Th}(E)$ zadane jest wzorem $\Delta(e) = [p(e), e]$ oraz $p(\infty) := [\infty, \infty]$ (sprawdzić, że jest ciągłe). Definiujemy $s_\natural([\phi] := \Delta^*([\phi] \wedge U_E)$

Twierdzenie Thoma o izomorfizmie. *Dla dowolnej q-wymiarowej wiązki wektorowej $E \to X$ homomorfizm $s_\natural : N^*(X) \to \tilde{N}^{*+q}(\mathrm{Th}(E))$ jest izomorfizmem N^*-modułów.*

Klasą Eulera q-wymiarowej wiązki wektorowej $E \to X$ nazywamy element $e(E) := s_0^*(U_E) \in N^q(X)$. Zauważmy, że $e(E)$ jest podrozmaitością w X otrzymaną w wyniku transwersalnego przecięcia jej samą ze sobą w rozmaitości E. Konstrukcja klasy Thoma na następujące własności:

Twierdzenie. *Konstrukcja klasy Eulera $E \rightsquigarrow e(E)$ ma następujące własności:*

Jeśli $E \to X$ ma nigdzie nie znikający przekrój, to $e(E) = 0$;

Dla przekształcenia $f : Y \to X$ zachodzi równość $f^*e(E) = e(f^*E)$;

Dla wiązek wektorowych $E_1, E_2 \to X$ zachodzi równość $e(E_1 \oplus E_2) = e(E_1) \cup e(E_2)$.

Przyjrzyjmy się dokładniej klasie Thoma i klasie Eulera wiązki kanonicznej nad (rzeczywistą) przestrzenią rzutową.

Zadanie. *Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową a $H_V \to \mathbb{P}(V)$ będzie wiązką kanoniczną nad jej przestrzenią rzutową. Istnieje homeomorfizm $\mathrm{Th}(H_V) \simeq \mathbb{P}(V \oplus \mathbb{R})$ przeprowadzający przekrój zerowy $\mathbb{P}(V) \subset H_V \subset \mathrm{Th}(H_V)$ na podprzestrzeń $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(V \oplus \mathbb{R})$. a uzwarcenia włókien na liniowo zanurzone podprzestrzenie $\mathbb{P}(L \oplus \mathbb{R}) \subset \mathbb{P}(V \oplus \mathbb{R})$, gdzie $L \subset V$ jest podprzestrzenią jednowymiarową. (Jeśli $V = \mathbb{R}^n$ to wiązkę kanoniczną będziemy oznaczać $H_n \to \mathbb{P}^n$.)*

Przy opisanych w zadaniu homeomorfizmach klasa Thoma $U_V \in \tilde{N}^1(\mathrm{Th}(H_V))$ odpowiada włożeniu $\mathbb{P}(V) \subset P(V \oplus \mathbb{R})$, natomiast klasa Eulera $e(H_V) \in N^1(\mathbb{P}(V))$ jest klasą dowolnego włożenia $\mathbb{P}(V') \subset \mathbb{P}(V)$, gdzie $V' \subset V$ jest dowolną podprzestrzenią liniową kowymiaru 1. Zauważmy, że $U_V = e(H_{V \oplus \mathbb{R}})$. W przypadku gdy $V = \mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać $U_V = U_n$ oraz $e(H_V) = e_n$.

Pierścień kobordyzmu przestrzeni rzutowych

Obliczymy $N^*(\mathbb{P}^n)$ jako N^*-algebrę, a nawet ogólniej: dla dowolnej rozmaitości X będziemy rozważać $N^*(X \times \mathbb{P}^n)$ jako $N^*(X)$-algebrę, poprzez homomorfzim pierścieni indukowany przez projekcję $p_1 : X \times \mathbb{P}^n \to X$. Będziemy rozważać wiązkę liniową $X \times H_n \xrightarrow{id \times p} X \times \mathbb{P}^n$, które jest izomorficzna z wiązka przeciągniętą $p_2^* H_n$ gdzie $p_2 : X \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ jest rzutowaniem na drugą współrzędną.

Twierdzenie. *Istnieje izomorfizm pierścieni z gradacją*

$$\phi_n : N^*(X)[e_n]/(e_n^{n+1}) \to N^*(X \times \mathbb{P}^n),$$

gdzie $\deg(e_n) = 1$ *który przeprowadza generator* e_n *na klasę Eulera wiązki* $X \times H_n \xrightarrow{id \times p} X \times \mathbb{P}^n$ *(oznaczaną także* e_n*).*

Dowód. Indukcja po n; dla $n = 0$ twierdzenie jest oczywiste; (dla n=1 por. zadanie ??). Załóżmy, że ϕ_{n-1} jest dobrze zdefiniowane i jest izomorfizmem. Twierdzenie Thoma implikuje, że $s_\natural : N^*(X \times \mathbb{P}^{n-1}) \to \tilde{N}^*(X^+ \wedge \mathbb{P}^n) \subset N^*(X \times \mathbb{P}^n)$ jest izomorfizmem $N^*(X)$-modułów. Z kolei odwzorowanie ilorazowe definiuje zanurzenie pierścieni $\tilde{N}^*(X^+ \wedge \mathbb{P}^n) \subset N^*(X \times \mathbb{P}^n)$ oraz $N^*(X \times \mathbb{P}^n) = \mathrm{im}(p_1^*) \oplus \mathrm{im}(s_\natural)$ jako $N^*(X)$-moduły. Złożenie $N^*(X \times \mathbb{P}^{n-1}) \xrightarrow{s_\natural} N^*(X \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{i^*} N^*(X \times \mathbb{P}^{n-1})$ polega na mnożeniu przez element e_{n-1}. Wynika stąd, że element $e_n^n = s_\natural(e_{n-1}^{n-1}) \cup e_n$ jest generatorem wolnego $N^*(X)$-modułu $\ker(i_*)$. $\square$

Wniosek. *Istnieje izomorfizm pierścieni z gradacją*

$$\phi_{n,m} : N^*[x, y]/(x^{n+1}, y^{m+1}) \to N^*(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m),$$

gdzie $\deg(x) = \deg(y) = 1$ *który przeprowadza generator* x *na klasę Eulera wiązki* $p_1^* H_n$ *natomiast generator* y *na klasę Eulera wiązki* $p_2^* H_m$.

Z wniosku wynika, że dowolny element w $N^q(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$ można zapisać w postaci: $\sum_{i \leq n, j \leq m} a_{ij} x^i y^j$ gdzie $\deg(a_{ij}) + i + j = q$, czyli $a_{ij} \in N^{q-i-j}$.

Grupy formalne

Niech R^* będzie pierścieniem z gradacją takim, że $R^q = 0$ dla $q > 0$. Będziemy rozważać pierścień z gradacją szeregów formalnych od dwóch zmiennych x, y w gradacji 1, i oznaczać go $R^*[[x, y]]$. W gradacji n tego pierścienia leżą elementy postaci $\sum_{i,j>0} a_{ij} x^i y^j$ takie, że $\deg(a_{ij}) = -i - j + 1$. Zauważmy, że $R^*[[x, y]] = \mathrm{inv.lim}_{n,m} R^*[x, y]/(x^n, y^m)$ gdzie granica odwrotna jest brana w kategorii grup z gradacją.

Definicja. *Grupą formalna nad pierścieniem* R^* *nazywamy szereg dwóch zmiennych* $F \in R^*[[x,y]]$ *taki, że spełniona są następujące warunki:*

(Element neutralny) $F(x,0) = x$, $F(0,y) = y$.

(Łączność) $F(F(x,y),z) = F(x,F(y,z))$,

Grupa nazywa się przemienna, jeśli spełniony jest warunek:

(Przemienność) $F(x,y) = F(y,x)$.

Stwierdzenie. *Dowolna przemienna grupa formalna posiada dokładnie jeden element odwrotny tzn.* $\phi(x) \in N^*[[x]]$ $\phi(0) = 0$ *taki, że* $F(x,\phi(x)) = 0$

Przykład. *Dla dowolnego pierścienia* R^* *definiujemy grupę addytywną* $F_+(x,y) = x+y$. *Dla dowolnego* $a \in R^{-1}$ *określamy grupę multyplikatywną* $F_a(x,y) = x+y+axy$.

Rozważmy funktor $GF : Rings \to Set_*$ z kategorii pierścieni z gradacją do kategorii zbiorów z wyrróżnionym punktem, przypisujący pierścieniowi R^* zbiór $GF(R^*)$ grup formalnych nad R^* a dowolnemu homomorfizmowi pierścieni $\alpha : R \to S$ odwzorowanie polegające na przyporządkowaniu grupie formalnej $F(x,y) = \sum_{i,j>0} a_{ij}x^iy^j$ szeregu $\alpha_*F := \sum_{i,j>0} \alpha(a_{ij})x^iy^j$, który także oczywiście jest grupą formalną.

Stwierdzenie. *Funktor* $GF : Rings \to Set_*$ *jest reprezentowalny tzn. istnieje (dokładnie jedna) grupa formalna* (L, F_L) *taka,że* $\mathrm{Hom}(R,S) \ni \alpha \rightsquigarrow \alpha_*F_L \in GF(R)$ *jest bijekcją.*

Zbiór $GF(R)$ ma bogatszą strukturę, a mianowicie małej kategorii. Morfizmem grup formalnych $F \to G$ nad tym samym pierścieniem R^* nazywamy szereg jednej zmiennej postaci $\phi(x) = \sum_{i\geq 0} a_ix^i$ taki, że $\alpha F(x,y) = G(\alpha(x),\alpha(y))$ Zbiór morfizmów $F \to G$ oznaczamy $\hom_{R^*}(F,G)$ Morfizm $\phi(x)$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy $a_1 \in R^0$ jest elementem odwracalnym. Morfizm odwrotny oznaczamy α^{-1}. Oczywiście $(\alpha \circ \alpha^{-1})(x) = x$

Przykład. *Załóżmy, że* R^* *jest także* $\mathbb{Q}$ *-algebrą. Wtedy grupa addytywna* F_+ *i grupa multyplikatywna* F_a *(dla dowolnego* $a \in R^{-1}$*) są izomorficzne. Izomorfizm jest zadany przez szereg* $\alpha(x) := a^{-1}(e^{ax} - 1)$ *a szereg odwrotny przez* $a^{-1}\log(1+ax)$. **Uwagi:** *1. a nie musi byc odwracalny!. 2. Nad ciałem charakterystyki dodatniej grupa addytywna i multyplikatywna nie muszą być izomorficzne!*

Zadanie. *Rozważmy w pierścieniu szeregów formalnych jednej zmiennej* $R^*[[x]]_1$ *elementy gradacji* 1. *Grupa formalna* F *nad* R^* *zadaje w tym zbiorze strukturę grupy wzorem* $(\phi *_F \psi)(x) := F(\phi(x), \psi(x))$. *Homomorfizm grup formalnych nad* R^* *zadaje homomorfizm odpowiadających im grup.*

Twierdzenie (Lazard). *Niech* R^* *będzie pierścieniem charakterystyki 2 a* $F(x, y)$ *grupą formalną nad* R^* *taką, że* $F(x, x) = 0$. *Wtedy grupa formalna* F *jest izomorficzna z grupą addytywną, przy czym istnieje dokładnie jeden szereg* $\alpha(x) = x + a_1x^2 + a_2x^3 + ...$ *zadający ten izomorfizm taki, że* $a_j = 0$ *jeśli* $j = 2^i - 1$ *dla pewnego* i.

Uwaga. *Jeśli* $a \neq 0$ *to grupa addytywna* F_+ *i multyplikatywna* F_a *nad pierścieniem charakterystyki 2 nie są izomorficzne.*

Skonstruujemy uniwersalna grupe formalna dla grup nad pierścieniami charakterystyki 2, spełniającymi warunek $F(x, x) = 0$. Niech $L := \mathbb{Z}_2[a_2, a_4, a_5, ..]$ będzie pierścieniem wielomianów z gradacją; $\deg a_i = -1$ przy czym $i \neq 2^j - 1$. Zdefiniujemy szereg $l(x) \in L[[x]]$ wzorem $l(x) := x + \sum_{i>0} a_ix^{i+1}$. oraz grupę formalną $F_L(x, y) := l^{-1}(l(x) + l(y))$.

Stwierdzenie. *Grupa formalna* (L, F_L) *jest uniwersalna wśród grup formalnych nad pierścieniami charakterystyki 2, spełniających warunek* $F(x, x) = 0$.

Dowód. Niech (R, F) będzie dowolna grupą formalną, spełniającą założenia twierdzenia Lazarda. Niech $\alpha(x) = x + \sum_{i\neq 2^j-1} b_ix^{i+1}$ jedynym szeregiem ustanawiającym izomorfizm między F a grupą addytywną. Zdefiniujmy homomorfizm $\phi(a_i) = b_i$, czyli tak, aby $\phi_*l = \alpha$. Mamy: $\phi_*F_L = \phi_*(l^{-1}(l(x) + l(y))) = \phi_*l^{-1}(\phi_*l(x) + \phi_*l(y)) = \alpha^{-1}(\alpha(x) + \alpha(y)) = F(x, y)$. □

Grupa formalna kobordyzmu

Wprowadzimy nową strukturę algebraiczną w pierścienia kobordyzmu N^*, która będzie pomocna do jego obliczenia. Dla dowolnych n, m rozpatrzmy zewnętrzny iloczyn tensorowy wiązek kanonicznych $H_n\hat{\otimes}H_m$ nad $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ i jego klasę Eulera $e(H_n\hat{\otimes}H_m) \in N^1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$. Z ostatniego wniosku wynika, że

$$e(H_n\hat{\otimes}H_m) = x + y + \sum_{0<i\leq n\ ,0<j\leq m} a_{ij}x^iy^j.$$

i co więcej współczynniki $a_{ij} = a'_{ij}$ dla $n \leq n'$, $m \leq m'$ oraz $i \leq n$, $j \leq m$. Podążając z n, m do nieskończoności otrzymujemy szereg formalny nad N^*

$$F(x,y) :== x + y + \sum_{i>0\,,\,j>0} a_{ij} x^i y^j$$

gdzie $a_{ij} \in N^{-(i+j-1)}$, taki że dla dowolnych wiązek jednowymiarowych $E, F \to X$ możemy przy jego pomocy obliczyć $e(E \otimes F)$:

$$e(E \otimes F) = e(E) + e(F) + \sum_{i>0\,,\,j>0} a_{ij} e(E)^i e(F)^j.$$

Stwierdzenie. *Szereg F_{N^*} jest przemienną grupą formalną przy czym $F_{N^*}(x,x) = 0$.*

Dowolny szereg dwóch zmiennych nad pierścieniem R, spełniający powyższe warunki nazywa się **grupą formalną nad** R.

Obliczymy współczynniki szeregu F. W tym celu dla dowolnych n, m znajdziemy odwzorowanie $f_{n,m} : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^r$ takie, że $f^*_{n,m} H_r = H_n \hat{\otimes} H_m$. Odwzorowanie $f_{n,m}$ jest znanym w geometrii algebraicznej zanurzeniem Segre ($r = (n+1)(m+1) - 1$) danym wzorem $f_{n,m}([t_0; t_1; ..; t_n], [z_0; ..; z_m]) := [t_0 z_0; ..; t_i z_j; ..; t_n z_m]$. etc....

Stwierdzenie.

$$F_{N^*}(x,y) = \frac{x + y + \sum_{m>0, n>o} [H(m,n)] x^m y^n}{\mathbb{P}(x)\mathbb{P}(y)}$$

gdzie $\mathbb{P}(x) := \sum_i [\mathbb{P}^i] x^i$ a $H(m,n)$ są rozmaitościami Milnora.

Pokażemy, że F_{N^*} jest uniwersalną grupą formalną wśród grup spełniających założenia twierdzenia Lazarda. Na razie mamy tylko homomorfizm $\phi : L \to N^*$ taki, że $\phi_* F_L = F_{N^*}$. Ten homomorfzim definiuje na pierścieniu kobordzymu N^* strukturę L-modułu. Pokażemy najpierw, że ϕ jest monomorfizmem a następnie, że jest epimorfizmem.

Multyplikatywne klasy Thoma i transformacje multyplikatywne

Przypomnijmy uniwersalną własność teorii kohomologii $N^*(-)$:

Stwierdzenie. *Dla dowolnego funktora kontrawariantnego K : $Spaces_h \to Ab$ posiadającego transfer dla odwzorowań właściwych oraz dla dowolnego elementu $a \in K(pt)$ istnieje dokładnie jedna transformacja naturalna $\Phi_a : N^* \to K$ taka, że $\Phi_a(pt)(1) = a$*

Dla dowolnego homomorfizmu $h : L \to R$ będziemy rozpatrywać funktor z kategorii przestrzeni z wyróżnionym punktem do kategorii grup abelowych z gradacją:

$$\tilde{N}^*_h(X) := \tilde{N}^*(X) \otimes_L R$$

Uwaga. *Funktor $\tilde{N}^*_h(X)$ zachowuje wszystkie własności teorii kohomologii N^*, z wyjątkiem ciągu dokładnego Mayera-Vietorisa, ponieważ iloczyn tensorowy nie jest w ogólności funktorem dokładnym!*

Poprzednio dowolnej q-wymiarowej wiązce wektorowej $E \to X$ przyporządkowaliśmy kanoniczną klasę Thoma $t(E)$ będącą klasą kobordyzmu przekroju zerowego. Dla dowolnego homomorfizmu h przy jej pomocy definiujemy kanoniczną klasę Thoma $t_h(E) := t(E) \otimes_L 1 \in \tilde{N}^q_h(\mathrm{Th}(E))$. Mnożenie przez kanoniczna klasa Thoma $t(E)$ definiuje izomorfizm Thoma, także dla funktora $\tilde{N}^*_h(-)$. Wprowadzimy ogólniejszą definicję:

Definicja. *Multyplikatywną klasą Thoma (MKT) dla funktora $\tilde{N}^*_h(X)$ nazywamy przyporządkowanie każdej q-wymiarowej wiązce wektorowej $E \to X$ elementu $u(E) \in \tilde{N}^q_h(\mathrm{Th}(E))$ w taki sposób, że*

(Naturalność) $\bar{f}^*(u(E)) = u(f^*E)$

(Multyplikatywność) $u(E_1 \times E_2) = u(E_1) \times u(E_2)$

(Normalizacja) $u(\mathbb{R}) = t(\mathbb{R}) \otimes_L 1 \in \tilde{N}^1_h(S^1)$.

Oczywiście $t_h(-)$ jest MKT ; jednak nie każda MKT zadaje izomorfizm $\tilde{N}^m_h(X) \to \tilde{N}^{q+m}_h(\mathrm{Th}(E))$, bo w dowodzie twierdzenia o izomorfizmie Thoma korzysta się z ciągu dokładnego!

Twierdzenie. *Dla dowolnej MKT $u(-)$ w $\tilde{N}^*_h(-)$ istnieje dokładnie jedna stabilna, multyplikatywna transformacja naturalna*

$$\theta_u : \tilde{N}^*(-) \to \tilde{N}^*_h(-).$$

taka, że dla dowolnej wiązki $E \to X$ zachodzi $\theta_u(t(E)) = u(E)$.

Dowód. Wybór multyplikatywnej klasy Thoma definiuje transfer dla funktora $\tilde{N}^*_h(-)$. Stąd z własności uniwersalności istnieje żądana transformacja.

Klasy rozróżniające. Okazuje się, że dowolną multyplikatywną klasę Thoma w $\tilde{N}^*_h(-)$ można wyrazić przez kanoniczną klasę Thoma $t_h(E) \in \tilde{N}^q(\mathrm{Th}(E))$. Klasa ta definiuje izomorfizm Thoma $t_h(E) \cup - : N_h^0(X) \to \tilde{N}_h^q(\mathrm{Th}(E))$. Zadana multyplikatywna klasa Thoma $u(-)$ wyznacza elementy $v(E) \in N_h^0(X)$ dane wzorem $t_h(E)v(E) := u(E)$.

Lemat. *Przyporządkowanie $E \rightsquigarrow u(E) := v(E)t(E)$ jest multyplikatywną klasa Thoma wtedy i tylko wtedy, gdy przyporządkowanie $E \rightsquigarrow v(E) \in N^0(X)$ spełnia warunki:*

1. **Naturalność** $f^*v(E) = v(f^*E)$
2. **Multyplikatywność** $v(E \times E') = v(E)v(E')$
3. **Unormowanie** $v(\mathbb{R}) = 1$

Przyporządkowanie spełniające warunki (1-3) Lematu nazywamy klasą wykładniczą.

Twierdzenie. *Dla dowolnego szeregu $\phi(x) = x + r_1x^2 + r_2x^3 + ... \in R[[x]]$ gradacji 1 istnieje dokładnie jedna klasa wykładnicza v_ϕ taka, że dla dowolnej wiązki liniowej skończonego typu*

$$v_\phi(E) := 1 + e \otimes r_1 + e^2 \otimes r_2 + ...,$$

gdzie $e := e(E)$ jest klasą Eulera. (Jeśli $v(-)$ jest klasą wykładniczą to istnieje dokładnie jeden szereg $\pi(x)$ taki, że $v = v_\phi$.)

Ostatnie twierdzenie pozwala przypisać dowolnemu homomorfizmowi $h : L \to R$ oraz szeregowi $\phi(x) = x + r_1x^2 + r_2x^3 + ... \in R[[x]]$ gradacji 1 transformację naturalną. Najpierw szeregowi $\phi(x)$ przypisujemy klasę wykładniczą $v_\phi(-)$, a tej klasie następnie MKT $u_\phi(E) := v_\phi(E)t_h(E)$. Na mocy twierdzenia ??? MKT odpowiada transformacja naturalna:

$$\theta_\phi : \tilde{N}^*(X) \to \tilde{N}_h^*(X)$$

scharakteryzowana wzorem $\theta_\phi(t(E)) = u_\phi(E)$.

Działanie szeregów na homomorfizmach $L \to R$. Rozpatrzmy grupę szeregów $\phi(x) = x + r_1x^2 + r_2x^3 + ... \in R[[x]]$ gradacji 1. Ta grupa działa na zbiorze homomorfizmów $\mathrm{Hom}\,(L, R)$, gdzie (L, F_L) jest uniwersalną grupą formalną. Dowolny homomorfizm $h : L \to R$ definiuje grupę formalną F_h nad R. Zdefiniujmy nową grupę formalną $\phi_*F_h(x, y) := \phi F(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y))$. Homomorfizm odpowiadający tej grupie formalnej oznaczamy $\phi * h$. Łatwo sprawdzić, że $*$ jest działaniem grupy szeregów formalnych na zbiorze homomorfizmów.

Stwierdzenie. *Dla dowolnego $\phi(x) = x + r_1x^2 + r_2x^3 + ... \in R[[x]]$ transformacja*

$\theta_\phi : \tilde{N}^*(-) \to \tilde{N}^*_h(-)$ *rozszerza się do transformacji naturalnej*

$$\tilde{\theta}_\phi : \tilde{N}^*_{\phi * h}(-) \to \tilde{N}^*_h(-),$$

przy czym $\tilde{\theta}_{\phi_2 \circ \phi_1} = \tilde{\theta}_{\phi_1} \circ \tilde{\theta}_{\phi_2}$ *oraz* $\tilde{\theta}_x = id$.

Wniosek. *Dla dowolnego* ϕ *homomorfizm* $\tilde{\theta}_\phi$ *jest izomorfizmem.*

Rozpatrzmy homomorfizm $h : L \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_2 \subset L$ oraz niech $\lambda(x)$ będzie logarytmem uniwersalnej grupy formalnej. Rozpatrzmy homomorfizm

$$\tilde{\theta}_{\lambda^{-1}} : \tilde{N}^*_{\lambda^{-1} * h}(-) \to \tilde{N}^*_h(-).$$

Z definicji wynika, że $\lambda^{-1} * h = id$ a więc otrzymujemy:

Wniosek. *Istnieje izomorfizm*

$$\tilde{\theta}_{\lambda^{-1}} : \tilde{N}^*(-) \to (\tilde{N}^*(-) \otimes_L \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} L.$$

a więc homomorfizm $L \to N^*$ *odpowiadający grupie formalnej kobordyzmu jest monomorfzimem.*

Operacje kohomologiczne w kobordyzmie

Zdefinujemy dodatkową strukturę algebraiczną w teorii $N^*(-)$, która pozwoli nam wykazać, że w istocie $L \xrightarrow{\simeq} N^*$. Zaczniemy od ogólniejszych rozważań. Niech $h_G : \mathcal{S}p_G \to Ab$ będzie funktorem kontrawariantnym z kategorii przestrzeni z działaniem grupy $G \subset \Sigma_k$ do kategorii grup, posiadającym transfer dla odwzorowań właściwych rozmaitości. Możemy wówczas zdefiniować transformację naturalną $P^k : N^*(X) \to h_G(X^k)$ w następujący sposób: dla dowolnego odwzorowania właściwego $f : Z \to X$ jego k-ta potęga $f \times ... \times f : Z \times ... \times Z \to X \times ... \times X$ jest także odwzorowaniem właściwym. Korzystając z h-transferu możemy zdefiniować $P^k([f]) := f^k_*(1)$. Składając odwzorowanie P^k z G-odwzorowaniem indukowanym przez przekątną $\Delta : X \to X \times ... \times X$ (gdzie na X rozpatrujemy działanie G jest trywialne) otrzymujemy $Q^k := \Delta^* \circ P^k : N^*(X) \to h_G(X)$

Zauważmy, że jeśli $h = N^*$ to odwzorowanie $P^k : N^q(X) \to N^{kq}(X^k)$ polega po prostu na braniu k-tej potęgi kartezjańskiej elementu, a $Q^k : N^q(X) \to N^{kq}(X)$ polega na braniu k-tej potęgi w pierścieniu $N^*(X)$.

Dla naszych celów wystarczy rozpatrywanie grupy cyklicznej $G = Z_2 = \Sigma_2$. Dla przestrzeni X na której działa grupa Z_2 zdefiniujemy funktor $N^*_{[Z_2]}(X) :=$

$\lim_k N^*(S^k \times_{Z_2} X)$, gdzie $S^k \subset S^{k+1} \subset ...$ są sferami z działaniem antypodycznym. Zauważmy, że przestrzeń orbit $S^k \times_{Z_2} X$ jest rozmaitością, bowiem działanie Z_2 na $S^k \times X$ jest wolne. Dla dowolnego odwzorowania właściwego $f : X \to Y$ odwzorowanie $id \times_{Z_2} f : S^k \times_{Z_2} X \to S^k \times_{Z_2} Y$ jest także właściwe, a więc funktor $N^*_{[Z_2]}(-)$ jest wyposażony w transfer dla Z_2-odwzorowań właściwych.

Uwaga. *Można wykazać, że $N^*_{[Z_2]}(-)$ jest teorią kohomologii, tzn. mimo brania granicy odwrotnej dokładność ciągów jest zachowywana.*

Zauważmy pewne własności teorii $N^*_{[Z_2]}(-)$:

(H) Jeśli $f : X \to Y$ jest Z_2-odwzorowaniem, które jest homotopijna równoważnością, to $f^* : N^*_{[Z_2]}(Y) \xrightarrow{\simeq} N^*_{[Z_2]}(X)$.

(T) Jeśli X jest przestrzenią z trywialnym działaniem Z_2, to

$$N^*_{[Z_2]}(X) = N^*(\mathbb{P}^\infty \times X) \simeq N^*(X)[[e]].$$

(W) Jeśli X jest przestrzenią z wolnym działaniem Z_2, to $N^*_{[Z_2]}(X) = N^*(X/Z_2)$.

W dalszym ciągu będziemy rozważać operacje:

$$P := P^2 : N^q(X) \to N^{2q}_{[Z_2]}(X \times X) \text{ oraz } Q := Q^2 : N^q(X) \to N^{2q}_{[Z_2]}(X) = N^*(X)[[e]].$$

Operacja Q wyznacza ciąg operacji $Q^j : N^q(X) \to N^{2q-j}(X)$ zadanych wzorem $Q(x) = \sum Q^j(x)e^j$. Ze względów rachunkowych dla $k = 0, 1, ...$ wygodniej jest rozpatrywać operacje $R^k := Q^{q-k} : N^q(X) \to N^{q+k}(X)$, które wyznaczają operacje

$$R^k : \tilde{N}^q(X) \to \tilde{N}^{q+k}(X)$$

Twierdzenie. *Operacje R^k są stabilne (tzn. przemienne z homomorfizmem zawieszenia) oraz mają następujące własności:*

(a) Dla $x \in \tilde{N}^q(X)$ zachodzi:

$$R^k(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{jeśli } q = k; \\ 0, & \textit{jeśli } q > k. \end{cases}$$

(b)

$$R^k(xy) = \sum_{i+j=k} R^i(x)R^j(y)$$

Zauważmy, że suma występująca w (b) jest skończona, ponieważ na mocy (a) $R^k(x) = 0$ dla $k > \mathrm{grad}(x)$.

Rozważmy transformację naturalną $\mu : \tilde{N}^*(X) \to \tilde{N}^*(X) \otimes_L Z_2 =: \tilde{h}^*(X)$ daną przez $x \rightsquigarrow x \otimes 1$. Chcemy wykazać, że $\tilde{h}^*(-)$ jest zwykłą (sigularną) teorią kohomologii z $\mathbb{Z}_2$ współczynnikami. Przypomnijmy, że na mocy (???) funktor h jest teorią kohomologii, wystarczy więc sprawdzić, że $\tilde{h}^q(S^0) = 0$ dla $q \neq 0$. Z definicji wynika, że

$$\tilde{h}^q(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{dla } q = 0; \\ 0 & \text{dla } q > 0. \end{cases}$$

Pozostaje wykazać znikanie grup współczynników dla $q < 0$. Niech $R := \mathbb{F}_2[t]$ będzie pierścieniem z gradacją wielomianów jednej zmiennej w gradacji -1. Będziemy rozważać złożenie homomorfizmu augumentacji i włożenia: $L \to \mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_2[t]$. Będziemy rozważać funktor związany z tym homomorfizmem:

$$\tilde{N}^*(X) \otimes_L \mathbb{F}_2[t] \simeq \tilde{h}^*(X)[t].$$

Weźmy teraz szereg (a właściwie wielomian) $\phi(x) := x + tx^2 \in R[[x]]$. Z tym szeregiem jest stowarzyszona transformacja naturalna $\theta_\phi : \tilde{N}^*(X) \to \tilde{h}^*(X)[t]$.

Lemat. *Istnieje transformacja $\vartheta_\phi : \tilde{N}^*(X) \otimes_L \mathbb{F}_2 \to \tilde{N}^*(X) \otimes_L \mathbb{F}_2[t]$, taka, że $\theta_\phi = \vartheta_\phi \circ \mu$ oraz $a_0 \circ \vartheta_\phi = Id : \tilde{h}^*(X) \to \tilde{h}^*(X)$ gdzie $a_0 : \mathbb{F}_2[t] \to \mathbb{F}_2$.*

Następny lemat opisuje kluczowy związek między transformacją θ_ϕ a operacjami R^k :

Lemat. *Dla $x \in \tilde{N}^*(X)$ w pierścieniu $\tilde{N}^*(X) \otimes_L \mathbb{F}_2[t, t^{-1}]$ zachodzi równość:*

$$\theta_\phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} R^{n-i}(x) \otimes t^{n-i}$$

Lemat. *Dla dowolnej rozmaitości X zachodzi $\tilde{h}^q(X) = 0$ dla $q < 0$.*

Dowód. Ponieważ $\mu : \tilde{N}^*(X) \to \tilde{h}^*(X)$ jest epimorfizmem, więc ponieważ $R^0(x) = 0$ dla $\mathrm{grad}(x) < 0$, wystarczy wykazać, że $\mu \circ R^0 = R^0$. Z ostatnich dwóch lematów mamy:

$$\mu(x) = a_0 \circ \theta_\phi(x) = a_0(\sum_{i=0}^{\infty} R^{n-i}(x) \otimes t^{n-i}) = R^0(x) \otimes 1 = (\mu \circ R^0)(x). \square$$

Twierdzenie. *Istnieje naturalna równoważność teorii kohomologii*

$$\tilde{N}^*(X) \xrightarrow{\simeq} \tilde{H}^*(X;\mathbb{F}_2) \otimes_{\mathbb{F}_2} L,$$

w szczególności istnieje izomorfizm grup formalnych $(N^*, F_N) \simeq (L, F_L)$.

Wniosek. *Istnieje izomorfizm* $\mathbb{F}_2$*-algebr z gradacją* $N^* \simeq \mathbb{F}_2[a_2, a_4, a_5, ...]$ *gdzie* $grad(a_i) = i$ *oraz* $i \neq 2^j - 1$. *W gradacjach parzystych za generatory można wybrać przestrzenie rzutowe.*